1. : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{C}$ de module 1. Montrer que $|x-u| = |1-xu|$, sans utiliser la forme algébrique de u et interpréter géométriquement le résultat.

2. : Montrer que si u et v sont de module 1, alors $\dfrac{u+v}{1+uv}$ est réel, sans utiliser la forme algébrique de u et v ; que peut-on dire de $\dfrac{u+v}{1-uv}$?

3. : Des identités remarquables ; les nombres a, b, c, d, u sont des complexes.

   (a) Identité de Diophante (3ème siècle av. J.C.), appelée aussi identité de Fibonacci.

      i. Montrer que $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$ en passant progressivement et naturellement du membre de gauche à celui de droite.
      ii. Quelle propriété des entiers qui sont sommes de deux carrés en déduit-on ?
      iii. Application : sachant que $13 = 9+4$, et $29 = 25+4$, décomposer 377 en somme de 2 carrés de 2 façons différentes.

   (b) * Identité de Brahmagupta (mathématicien indien, 628 ap. J.C.), généralisant la précédente :

      i. Montrer que $\left(a^2+ub^2\right)\left(c^2+ud^2\right) = (ac+ubd)^2 + u\,(ad-bc)^2$ à l'aide des complexes (introduire v, l'une des racines carrées de u).
      ii. Décomposer 561 en la somme d'un carré et du double d'un carré en utilisant cette identité.

   (c) * Identité d'Euler :

      i. Montrer que si u, v, u', v' sont 4 complexes :
      $$\left(|u|^2+|v|^2\right)\left(|u'|^2+|v'|^2\right) = |uu'-vv'|^2 + \left|u\overline{v'}+v\overline{u'}\right|^2$$
      ii. Écrire l'identité dite d'Euler, obtenue en écrivant l'identité précédente avec les coordonnées de u, v, u', v'; qu'en déduit-on sur les entiers qui sont sommes de quatre carrés ? Appliquer ceci pour décomposer 870 en somme de 4 carrés.

4. : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$

   (a) Prouver $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2+|z'|^2\right)$.
   (b) Donner une interprétation géométrique.
   (c) Soit u une racine carrée de zz' ; prouver en utilisant a) que $|z|+|z'| = \left|\dfrac{z+z'}{2}+u\right| + \left|\dfrac{z+z'}{2}-u\right|$.

5. : Démontrer à l'aide des complexes que pour tous réels a, b, c :
$$|a+b+c|\sqrt{2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}$$

6. * : CONCOURS GENERAL 1986

   (a) Soient z et z' deux nombres complexes. Prouver $|z|+|z'| \leqslant |z+z'| + |z-z'|$. Déterminer le cas d'égalité.
   (b) Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre nombres complexes. Prouver : $\sum\limits_{i=1}^{4} |z_i| \leqslant \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} |z_i+z_j|$. Préciser le cas d'égalité.

RACINES CARRÉES, ÉQUATIONS DU DEUXIÈME DEGRÉ

7. : Factoriser dans $\mathbb{C}$ l'expression polynomiale : $P(z) = z^3 + (1+3i)z^2 + (3i-2)z - 2$.

8. : Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$.
$4z^3 + 2(-5+i)z^2 + (8-i)z - 3(1+i) = 0$.

9. : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(z^2-2z-1\right)^2 + 9\,(z-1)^2 = 0$.

10. : Soit z un complexe n'appartenant pas à $\mathbb{R}_-$ et $u = z + |z|$.

(a) Vérifier que $\operatorname{Re}(u) > 0$.

(b) Montrer que $u^2 = 2\operatorname{Re}(u)\ z$; utiliser cette relation pour déterminer les racines carrées de $15 - 8i$.

(c) En déduire une expression des racines carrées de z ; comparer avec l'expression du cours.

FORME EXPONENTIELLE

11. : Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

(a) $z_1 = 1 + \cos\varphi - i\sin\varphi$ et $\dfrac{1}{z_1}$;

(b) $z_2 = 1 + i\tan\alpha$, $\dfrac{z_2}{\overline{z_2}}$ et $\dfrac{1}{z_2}$; $z_3 = 1 + i\cot\alpha$.

(c) $z_4 = \dfrac{\cos x - i\sin x}{\sin x - i\cos x}$.

12. : Linéariser :

(a) $P(x) = \cos x\cos^2 2x\cos^3 3x$.
réponse : $\dfrac{1}{32}(\cos 14x + \cos 12x + 2\cos 10x + 5\cos 8x + 4\cos 6x + 7\cos 4x + 9\cos 2x + 3)$

(b) $Q(x) = \sin x\sin^2 2x\sin^3 3x$.

13. :

(a) Prouver les égalités suivantes en utilisant les nombres complexes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{\cos^k x} = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x\cos^n x}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin kx}{\cos^k x} = \frac{\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x}{\sin x\cos^n x}$

(b) Généraliser au calcul de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k\cos kx$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k\sin kx$ (a réel).

14. Vérifier que $\tan nx = \dfrac{\operatorname{Im}\left((1+i\tan x)^n\right)}{\operatorname{Re}\left((1+i\tan x)^n\right)}$. Exprimer $\tan 3x$ et $\tan 4x$ en fonction rationnelle de $\tan x$.

15. :

(a) Montrer : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\quad x + jy + j^2 z = 0 \Leftrightarrow x = y = z$ (bien sûr $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$).

(b) Calculer : $(x+y+z)\left(x+jy+j^2z\right)\left(x+j^2y+jz\right)$.

(c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ (avec $x, y, z \in \mathbb{R}$).

16. * :

(a) Déterminer deux complexes z_1 et z_2 sachant que $\begin{cases} z_1 + z_2 = r \in \mathbb{R} \\ \arg(z_1) = \alpha_1 \\ \arg(z_2) = \alpha_2 \end{cases}$.

(b) Application : un traîneau est tiré par deux chiens reliées à lui par deux cordes attachées en un même point ; le mouvement est rectiligne ; la première corde fait un angle de 20° avec l'axe du traîneau, la deuxième un angle de 30°; La résultante des forces de traction a une intensité de 300 N ; calculer les intensités des forces de traction de chacun des chiens.

COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

17. Soit F la transformation du plan définie un complexes par $z' = \dfrac{1+i}{1-i}z + 1$;

(a) Donner sa nature et ses éléments caractéristique.

(b) Donner son expression analytique.

(c) Déterminer l'image par F de la droite d'équation $y = x + 1$.

18. : Soient a, b deux complexes distincts ; à tout point M d'affixe $z \neq a$ on fait correspondre $f(M)$ d'affixe $Z = \dfrac{z-b}{z-a}$; on de demande de déterminer géométriquement les ensembles suivants :

    (a) $f^{-1}(Ox) = \{M(z) \,/\, Z \text{ est réel}\}$
    (b) $f^{-1}(Oy)$
    (c) $f^{-1}(\text{cercle}(O,1))$
    (d) * d'une façon générale, l'image réciproque d'une droite passant par O ou d'un cercle centré en O (cf ex 47 de géométrie).

19. * Une hyperbole en complexes.

    (a) Soit a un complexe non nul. Déterminer en passant aux coordonnées l'ensemble H des points M du plan d'affixe z pour lesquels $(z-a)(z+a)$ est réel. En utilisant les arguments, en déduire une définition géométrique de cet ensemble.
    (b) Soient deux nombres complexes distincts a et b. Déterminer l'ensemble K des points M du plan d'affixe z pour lesquels $(z-a)(z-b)$ est réel (se ramener par translation au cas précédent, faire une figure).

20. : Condition d'équilatéralité et théorème de Napoléon.
    Soit ABC un triangle du plan complexe, et soient a, b, c les affixes respectives de A, B, C.

    (a) Montrer que ABC est équilatéral et direct ssi $a + bj + cj^2 = 0$; à quelle condition est-il équilatéral et indirect ? A quelle condition ne faisant plus intervenir j est-il équilatéral?
    (b) * Sur les côtés d'un triangle ABC quelconque et extérieurement à ce triangle, on construit les triangles équilatéraux ABC_1, BCA_1, et CAB_1, qui ont pour centres respectifs C', A', B'. Démontrer le théorème de Napoléon, à savoir : $A'B'C'$ est équilatéral. Que représente le centre du triangle $A'B'C'$ pour le triangle ABC ?

21. * : On donne $A(a), B(b), C(c)$ avec a, b, c de module 1. Soit $H(h)$ le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
    Montrer que $h = \dfrac{1}{2}\left(a + b + c - \dfrac{bc}{a}\right)$.

22. * : En géométrie complexe, une sphère est réunion de droites !
    On considère dans $\mathbb{C}^3$ le sous-ensemble S d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, et pour tout λ complexe, la "droite" D_λ de représentation cartésienne $\begin{cases} x + iy = \lambda(1-z) \\ 1 + z = \lambda(x - iy) \end{cases}$ ainsi que la "droite" $D_\infty \begin{cases} z = 1 \\ x = iy \end{cases}$; montrer que S est la réunion des "droites" D_λ et de la "droite" D_∞.
    Indication : écrire l'équation sous la forme $(x - iy)(x + iy) = (1-z)(1+z)$.

RACINES n-IÈMES

23. : Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $\sqrt{3} + i$; en déduire $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

24. :

    (a) Factoriser dans $\mathbb{C}$ les expressions $z^3 + 1$ et $z^4 + 1$.
    (b) En déduire des factorisations dans $\mathbb{C}$ de $a^3 + b^3$ et $a^4 + b^4$.

25. : Montrer l'équivalence, pour $n \geqslant 3$: u est une racine n-ième de l'unité ssi $u \neq 0$ et $u^{n-1} = \overline{u}$.

26. : Calculer $(2+i)^6$; en déduire une racine sixième simple de $117 - 44i$, une de $117 + 44i$ et une de $44 + 117i$. Déterminer toutes les racines cubiques de $117 - 44i$.

27. :

    (a) Montrer que dans $\mathbb{C}$: $a^n = b^n \iff \exists k \in [|0, n-1|] \quad b = e^{\frac{2ik\pi}{n}} a$.
    (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $27(z-1)^6 - (z+1)^6 = 0$.

(c) Réponse : $2 \pm \sqrt{3}$ et $\dfrac{2 \pm 3i}{4 \pm \sqrt{3}}$.

28. : Résoudre $(z-i)^n = (z+i)^n$

(a) par le calcul.

(b) géométriquement ; construire les images des solutions pour $n = 3, 4, 6$.